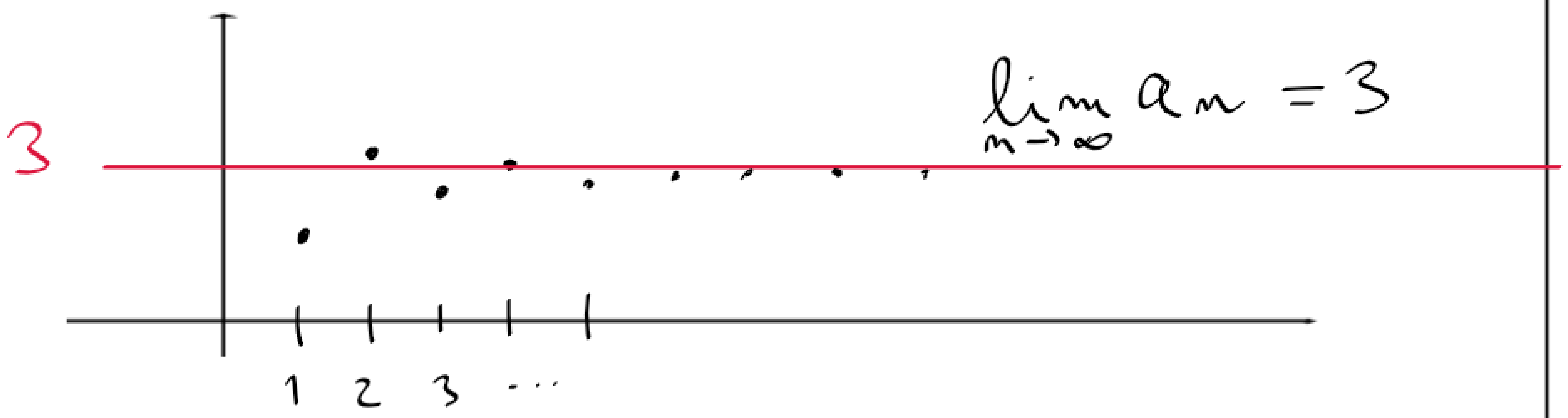
Posloupnosti a řady I

Jaký je rozdíl: V obou případech máme konečně, nebo nekon. mnoho čísel (obvykle $\in \mathbb{R}$)

a_n, $n \in \mathbb{N}$.

POSL.: • $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

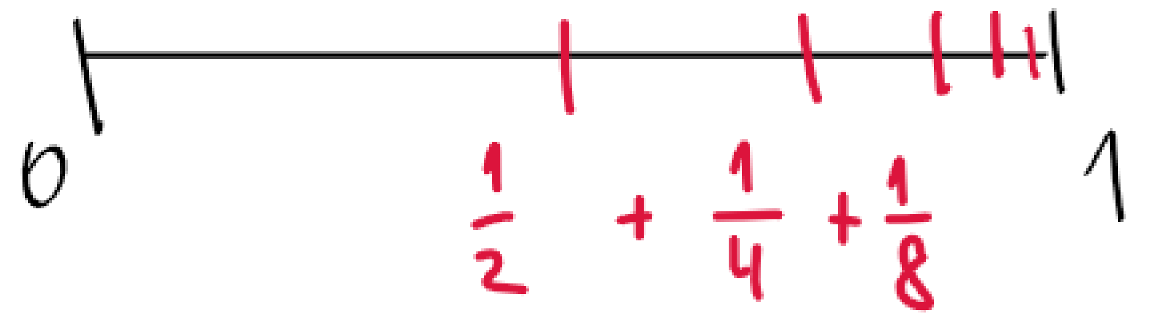
zajímáme se např. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

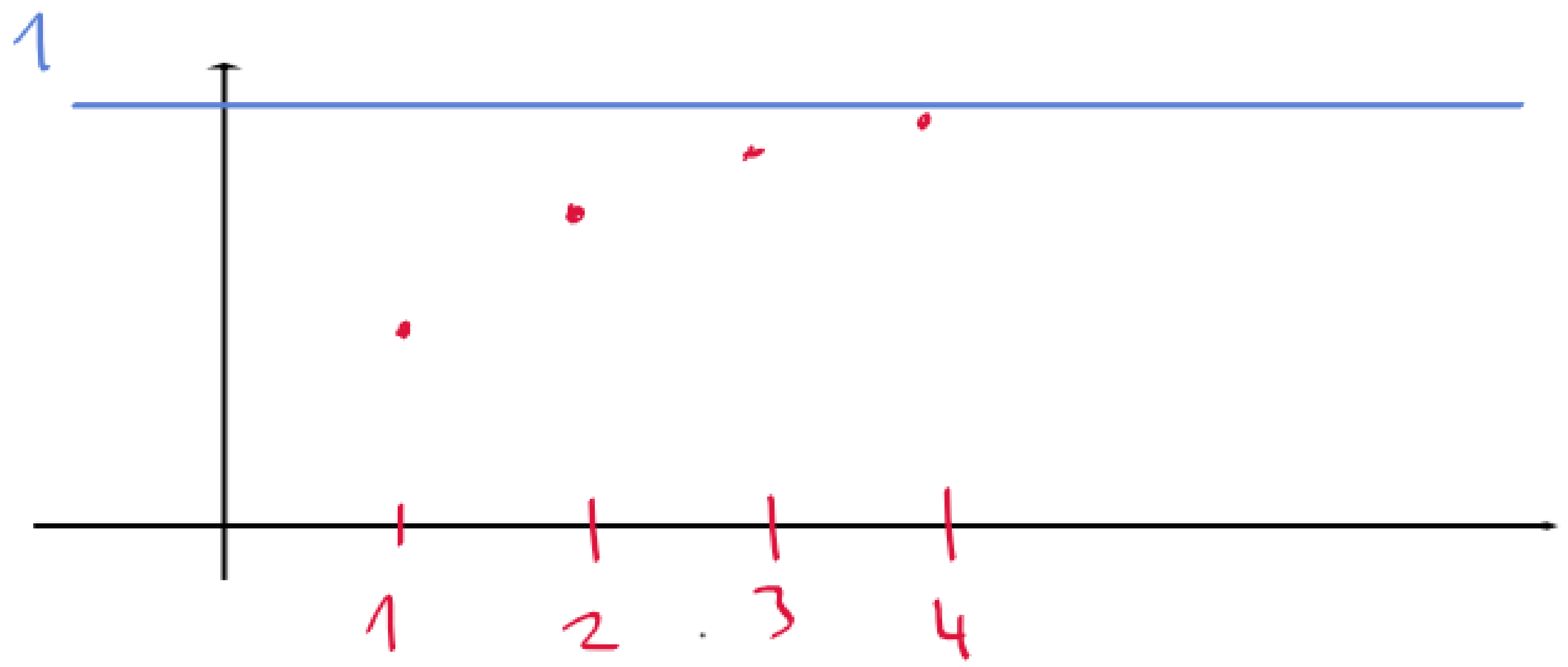


ŘADA: vlastně součet (typicky nekon. čísel)

• $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

• $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$

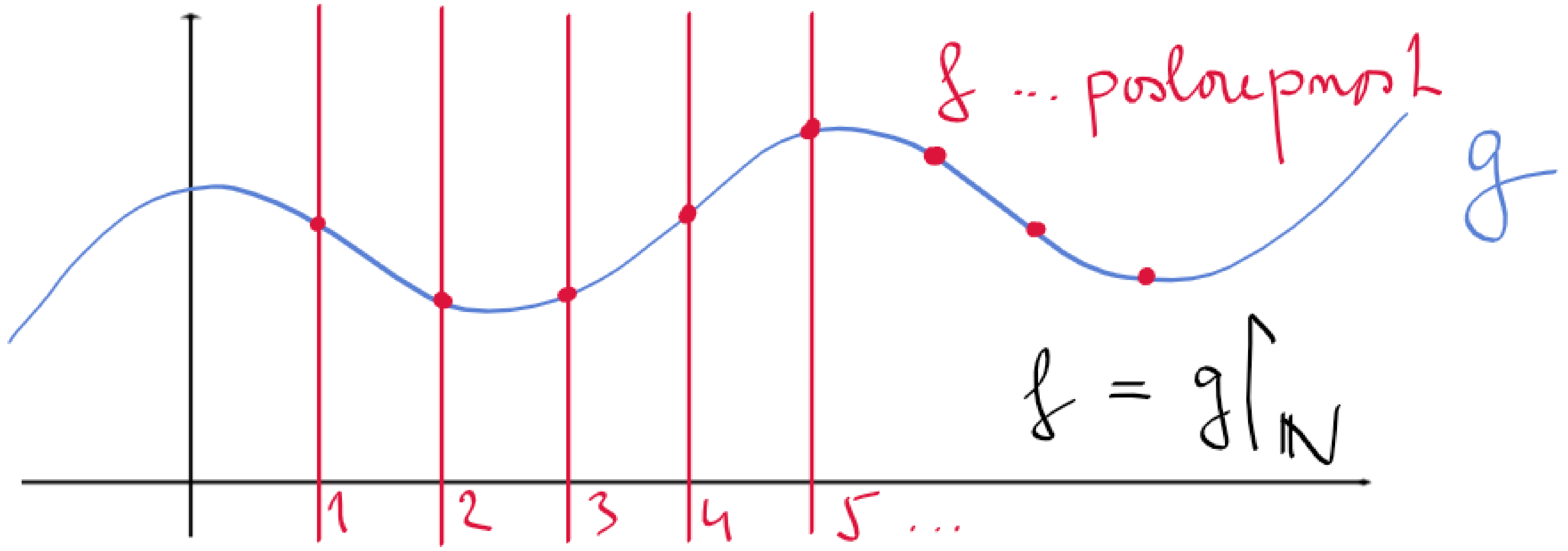




Definice: Posloupností nazýváme libovolnou funkci $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Značíme $f(n) = a_n$ (příp. b_n)

resp. $f = (a_n)_{n=1}^{\infty}$.



Konkrétní příklady posloupností

0) KONSTANTNÍ POSLOUPNOST

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána $\quad a_n = c \quad (n \in \mathbb{N})$

kde $c \in \mathbb{R}$ nezávisí na indexu n.

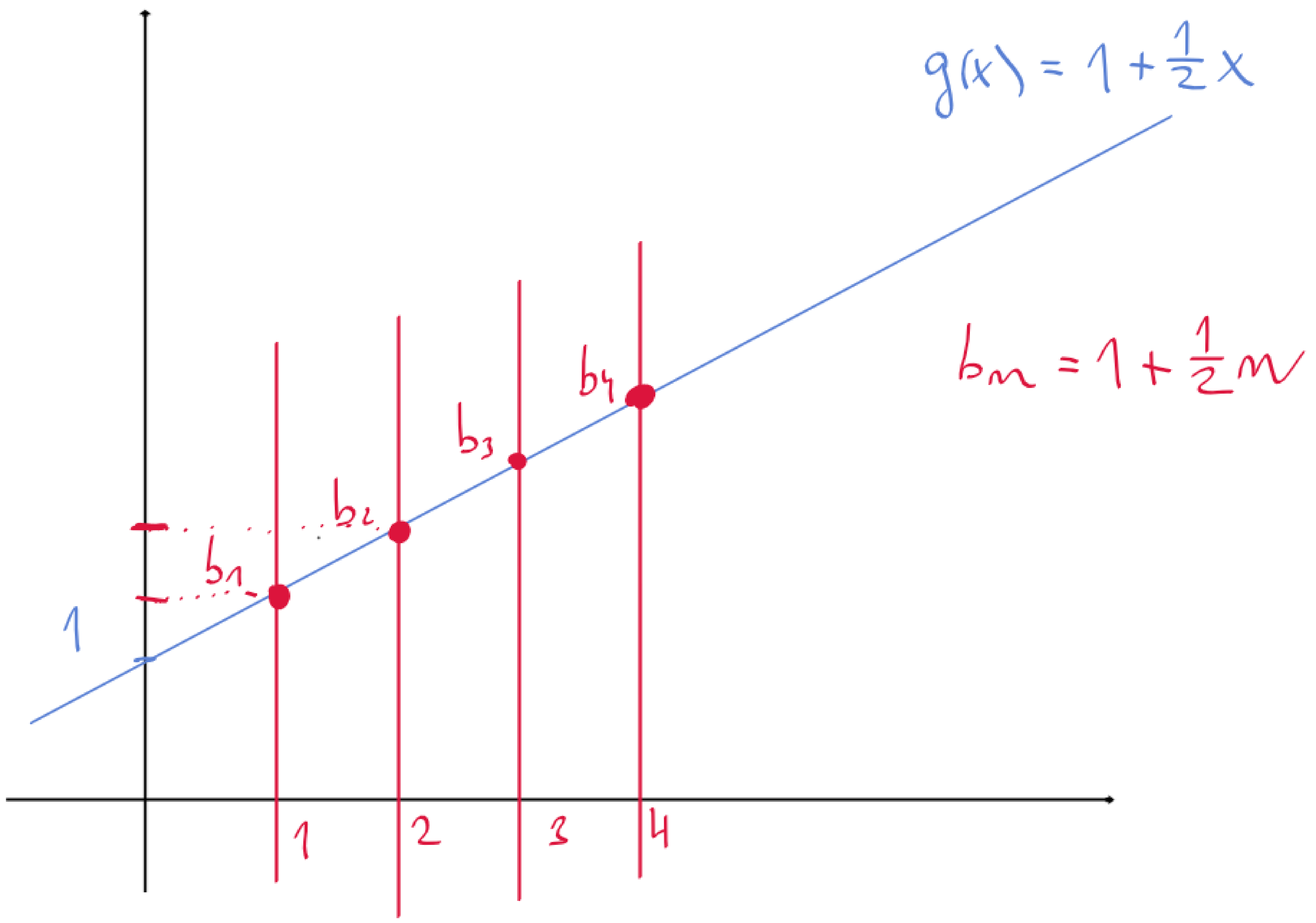
1) ARITMETICKÁ POSLOUPNOST $(b_n)_{n=0}^{\infty}$

$$\boxed{b_n = b_0 + n \cdot d} \qquad (d \in \mathbb{R} \ldots \text{diference})$$

nultý člen je dán, další lze spočíst.

$b_n = 1 + n \cdot 7 \qquad b_{10} = 1 + 10 \cdot 7 = 71$

$$b_{n+1} - b_n = b_0 + (n+1) \cdot d - (b_0 + n \cdot d) =$$
$$= b_0 + d(n+1-n) - b_0 =$$
$$= d \qquad (\text{platí pro } n \in \mathbb{N})$$



aritmetická posl. $\longleftrightarrow$ lineární fce

Zřejmě: A.P. je určena už libovolnými dvěma členy (a_1, a_{600})

2) GEOMETRICKÁ posloupnost: $(c_n)_{n=0}^{\infty}$

$$\left[\boxed{c_n = c_0 \cdot q^n} , \quad n \in \mathbb{N} \right],$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient. Tj.: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = q$

Tj. q je poměr po sobě jdoucích členů.

Pozn.: • konst. posl. je geometrická.

(c_n) je konstantní $\iff q = 1 \vee c_0 = 0$

Příklad: $c_0 = 1$, $q = 2$; $c_n = 2^n$

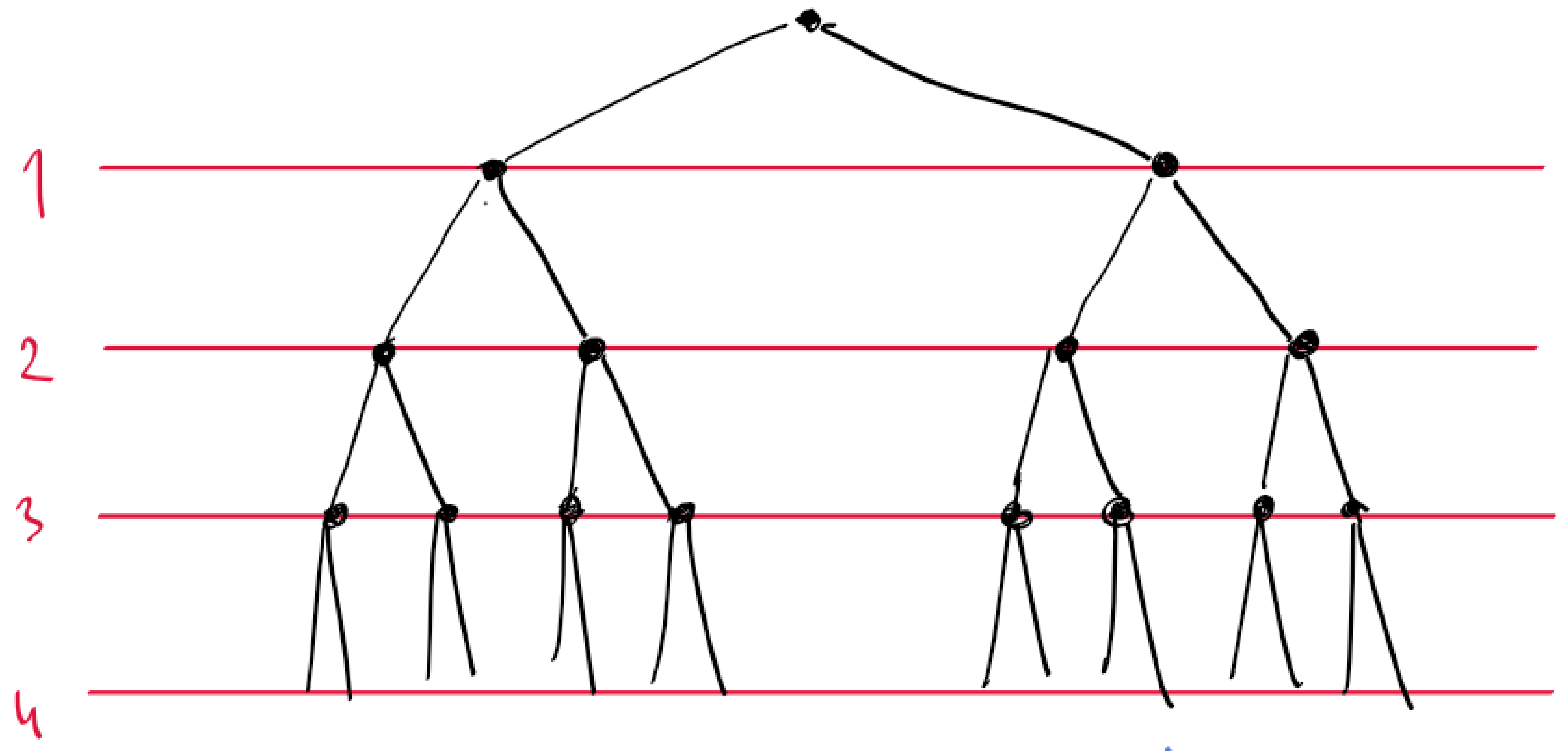
n	0	1	2	3	4	5	6	…	8	9	10
c_n	1	2	4	8	16	32	64		256		1024

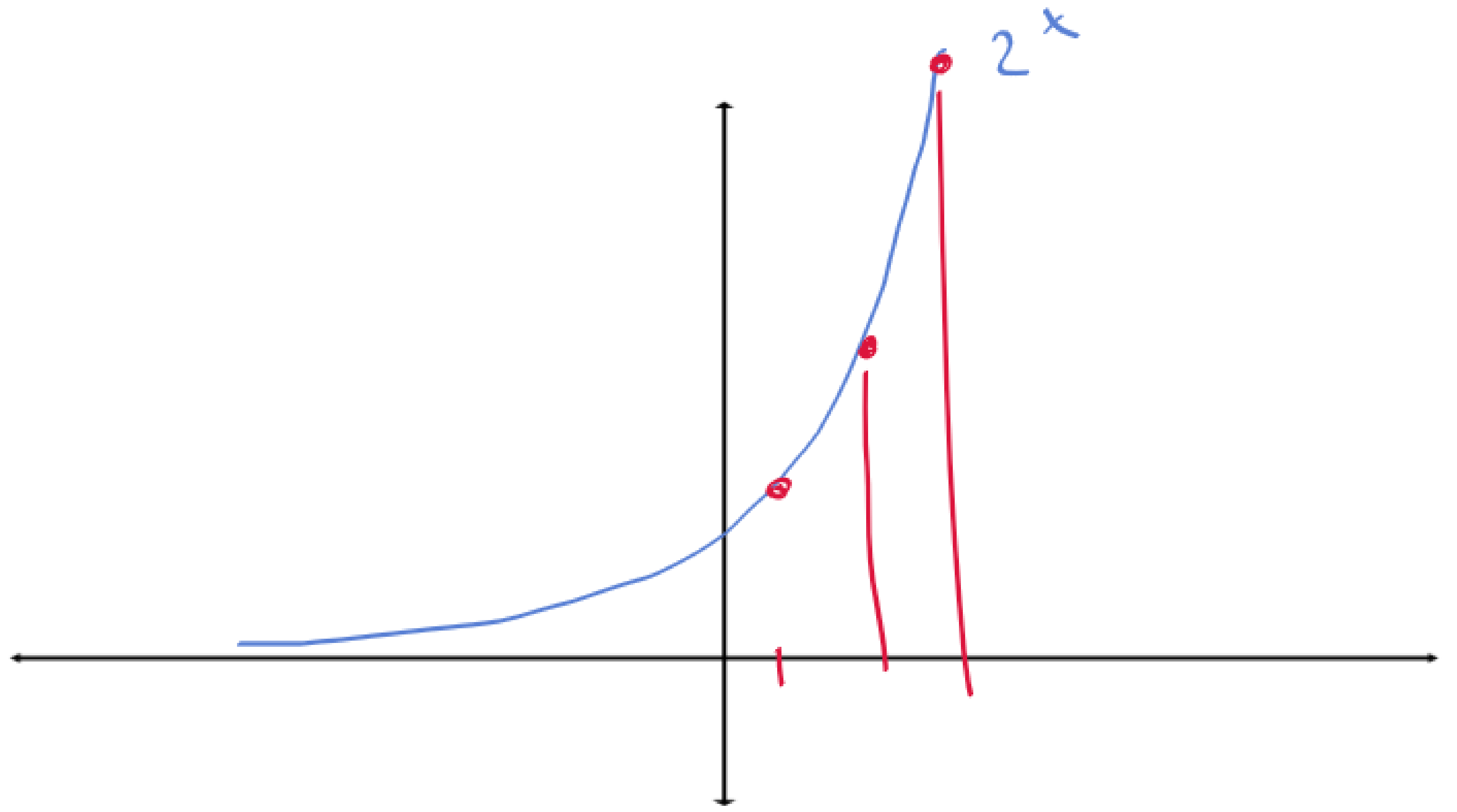
$$\left[\begin{array}{l} kB = 1024\,B = 2^{10}\,B \\ km = 1000\,m \end{array} \right]$$

$q = 0$ standardně definujeme $0^0 = 1$

$c_0 =$ daná h.

$c_n = c_0 \cdot 0^n = 0$





ZPŮSOBY ZADÁNÍ posloupnosti

(a) Explicitním vzorcem: $a_n = f(n)$

Třeba geometrická $a_n = 6^n$

(b) Rekurentní vzorec:

např. pro geometrickou posloupnost:

$[\,a_0 = 1, \quad q = 6\,]$ ... rek. vzorec:

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = q \cdot a_n = 6 \cdot a_n$$

$$a_{1000} = 6 \cdot a_{999}$$
$$a_{1000} = 6 \cdot 6 \cdot a_{998}$$
$$= 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot a_{997}$$
$$\vdots$$

pro aritmetickou posl. rekurentní:

$$\left[\begin{array}{l} a_0 \\ a_{n+1} = a_n + d \end{array}\right]$$

---

3) FAKTORIÁL: $(d_n)_{n=1}^{\infty}$

neuspokojivé

$$d_n = n! = \boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Rekurentně $d_1 = 1$

$$d_{n+1} = (n+1)\, d_n$$
$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$$
$$= \ldots =$$
$$= 9! \cdot 10$$

Pozn.: Funkce $\Gamma(x)$ (gamma) je rozšířením posloupnosti $n!$ na $(0,\infty)$

4) FIBONACCIHO POSLOUPNOST

„součet předchozích dvou členů"

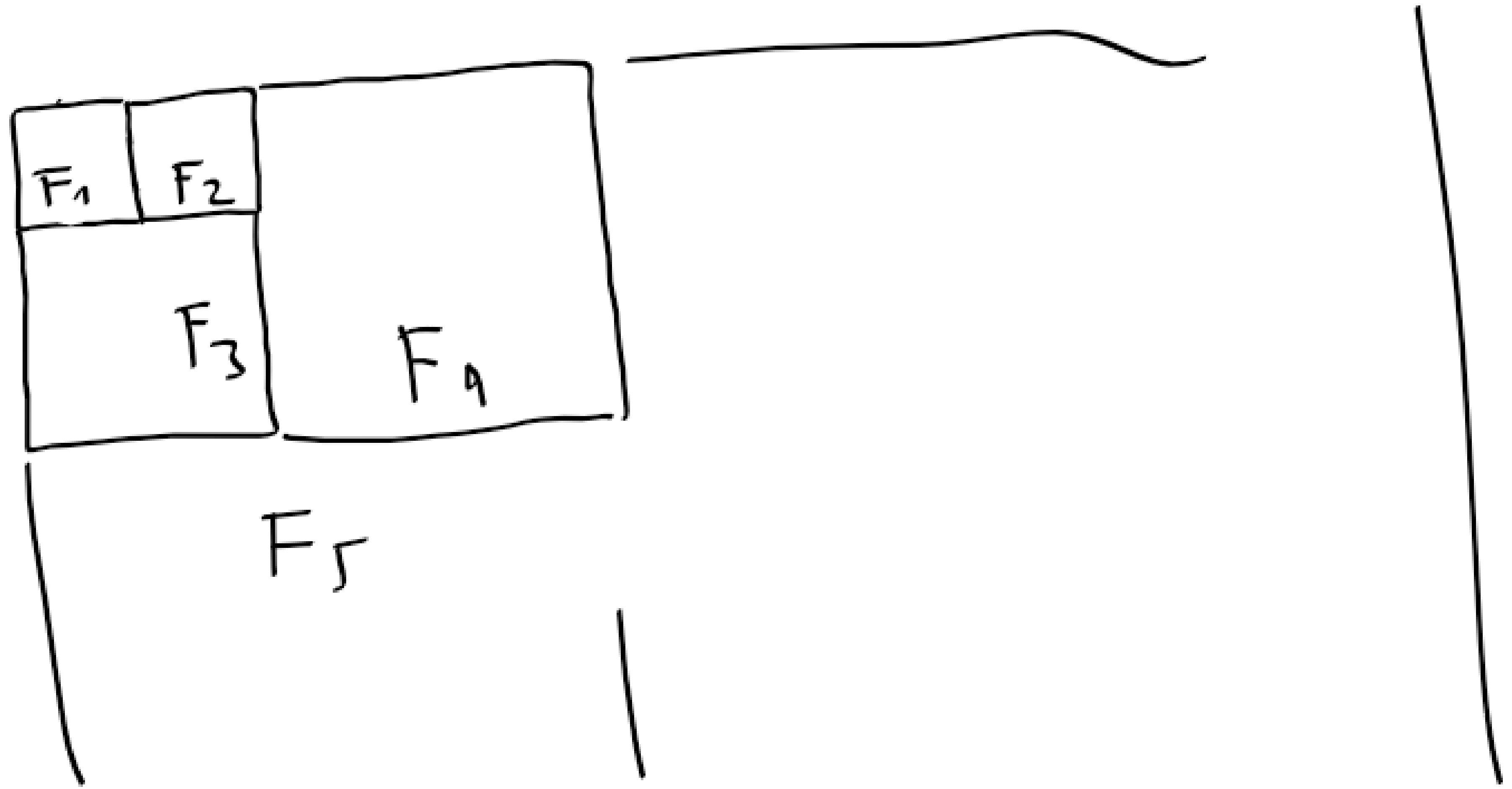
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

(pro $n \geq 2$).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	…

<u>Platí:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \doteq 1{,}618\ldots = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

poměr zlatého řezu.



<u>Explicitní vzorec (odvození je těžké)</u>

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (1-\varphi)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

<u>Cv.:</u> Dokažte matematickou indukcí.

4. Prvních šest členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje následující dvě podmínky:

$$a_1 - a_2 + a_3 = 9$$
$$a_4 - a_5 + a_6 = 72$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Součet $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ je větší než 180.
(b) $a_6 > 100$
(c) $a_5 = 48$
(d) $a_2 = 2$
(e) $a_1 + a_6 < 100$

Víme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická, tj.

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

$$a_1 - a_2 + a_3 = 9$$

$$a_0 \cdot q - a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 = 9$$

$$a_0 (q - q^2 + q^3) = 9 \qquad (1)$$

$$a_0 \cdot q^4 - a_0 \cdot q^5 + a_0 \cdot q^6 = 72$$

$$a_0 q^3 (q - q^2 + q^3) = 72 \qquad (2)$$

$\underline{(2) : (1)}$

$$q^3 = 8$$
$$q^3 = 2^3 \Rightarrow q = 2$$

$$(1) \quad a_0 (2 - 4 + 8) = 9$$
$$a_0 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = a_0 q^n = \frac{3}{2} \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

(b) : $a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96 \leq 100$ NE

(c) $a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$ ANO

(d) $a_2 = 3 \cdot 2^1 = 6$ NE

(e) $a_1 + a_6 = 3 + 96 = 99 < 100$ ANO

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 3\left(1 + 2 + \dots + 2^5\right) = 3(2^6 - 1)$$

$$= 3 \cdot (64 - 1) = 3 \cdot 63 > 180 \quad \checkmark$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$[q \neq 1]$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + \dots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Ověřte!

$$q^n - 1 = q^n - 1^n =$$

$$= (q-1)\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1\right)$$

$$1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^5 = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 63$$

$$1 + 9 + 81 + 729 + \dots + 9^{10} = \frac{9^{11} - 1}{9 - 1}$$